TD11

COUPLES DE VARIABLES DISCRÈTES.

Exercice 1 **ESC** 2009 Exercice 3.

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul. On dispose d'une pièce dont la probabilité de faire "pile" est $p \in]0, 1[$ et de $(n+1)$ urnes numérotées de 0 à n.

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, l'urne numéro k contient k boules vertes et $(n-k)$ boules rouges.

On considère l'expérience $\mathcal{E}$ suivante : on lance n fois la pièce puis on pioche une unique boule dans l'urne dont le numéro correspond au nombre de fois où "pile" a été obtenu. Par exemple, si on a obtenu 4 "piles" au cours des n lancers, on pioche dans l'urne numéro 4.

On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de "piles" obtenus lors des n lancers et Y la variable aléatoire qui vaut 1 si on tire une boule verte et 0 sinon.

1. **a.** Reconnaître la loi de probabilité de la variable X. On précisera en particulier $X(\Omega)$ et $P(X = k)$ pour tout k de $X(\Omega)$.
   Donner l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.

   b. En utilisant la formule de Konig-Huygens, calculer la valeur de $E(X^2)$.

2. **a.** Calculer $P_{(X=0)}(Y = 0)$ et $P_{(X=n)}(Y = 0)$. X et Y sont elles indépendantes ?

   b. Justifier que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P_{(X=k)}(Y = 1) = \frac{k}{n}$.

   c. En déduire en utilisant le système complet d'événements $(X = k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ que
   $$P(Y = 1) = \frac{E(X)}{n}.$$

   d. Donner la loi de Y et son espérance.

3. **a.** Montrer que
   $$E(XY) = \sum_{k=1}^{n} kP(X = k \cap Y = 1) = \frac{E(X^2)}{n}.$$

   b. En déduire la covariance du couple (X, Y).

Exercice 2 **EML** 2010 Exercice 3.

Les deux parties sont indépendantes.

Partie I

Une gare dispose de deux guichets. Trois clients notés C_1, C_2, C_3 arrivent en même temps. Les clients C_1 et C_2 se font servir tandis que les client C_3 attend puis effectue une opération dès que l'un des deux guichets se libère.

On définit X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires égales à la durée de l'opération des clients C_1, C_2, C_3 respectivement. Ces durées sont mesurées en minutes et arrondies à l'unité supérieure ou égale. On suppose que les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 suivent la loi géométrique de paramètre p, $p \in]0,1[$ et qu'elles sont indépendantes. On note $q = 1 - p$.

On note A l'événement : "C_3 termine en dernier son opération".

Ainsi l'événement A est égal à l'événement : $(\min(X_1, X_2) + X_3 > \max(X_1, X_2))$.

On se propose de calculer la probabilité de A.

1. Rappeler la loi de X_1, ainsi que son espérance $E(X_1)$ et sa variance $V(X_1)$.

On définit la variable aléatoire Δ par $\Delta = |X_1 - X_2|$.

2. Calculer la probabilité $P(\Delta = 0)$.

3. Soit n un entier naturel non nul.

a. Justifier que

$$P(X_1 - X_2 = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_2 = k)P(X_1 = n + k).$$

b. En déduire que $P(\Delta = n) = \frac{2pq^n}{1+q}$.

4. **a.** Montrer que Δ admet une espérance et la calculer.

b. Montrer que $E((X_1 - X_2)^2) = 2V(X_1)$. En déduire que Δ admet une variance $V(\Delta)$ et la calculer.

5. Montrer que l'événement A est égal à l'événement $(X_3 > \Delta)$.

6. **a.** En déduire que

$$P(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(\Delta = k)P(X_3 > k).$$

b. Exprimer $P(A)$ à l'aide de p et q.

Partie II

Dans cette partie, X désigne une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p, $p \in]0,1[$ et Y est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ, $\lambda \in]0, +\infty[$. On note $q = 1 - p$.

On suppose que X et Y sont indépendantes, c'est-à-dire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [0, +\infty[$,

$$P\left((X = k) \cap (Y \leqslant t)\right) = P(X = k)P(Y \leqslant t).$$

1. Rappeler une densité de Y ainsi que son espérance et sa variance.

2. On définit une variable aléatoire Z par $Z = \frac{Y}{X}$.

a. Montrer que pour tout $t \in [0, +\infty[$,

$$P(Z \geqslant t) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)P(Y \geqslant kt).$$

b. En déduire que pour tout $t \in [0, +\infty[$,

$$P(Z \geqslant t) = \frac{pe^{-\lambda t}}{1 - qe^{-\lambda t}}.$$

c. Montre que la variable aléatoire Z admet une densité et déterminer une densité de Z.

Exercice 3 **ESCP** 1996 Exercice 3.

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels strictement positifs.

Une urne contient des boules blanches, noires et rouges. Les proportions respectives de ces boules sont p pour les blanches, q pour les noires et r pour les rouges $(p + q + r = 1)$.

On fait dans cette urne des tirages successifs indépendants numérotés 1,2,... etc. Ces tirages sont faits avec remise de la boule tirée. Les proportions des boules restent ainsi les mêmes au cours de l'expérience.

Toutes les variables aléatoires sont définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. On note X_1 la variable aléatoire représentant le numéro du tirage auquel une boule blanche sort pour la première fois. Trouver la loi de probabilité de X_1 ; calculer son espérance et sa variance.

2. On note X_2 la variable aléatoire représentant le numéro du 2ème tirage d'une boule blanche.

- **a.** Trouver, pour tout couple d'entiers (k, l), la probabilité de l'événement $(X_1 = k,\ X_2 = k + l)$. En déduire la loi de probabilité de X_2.
- **b.** Montrer que la variable $U_2 = X_2 - X_1$ est indépendante de X_1 et qu'elle a la même loi de probabilité. En déduire l'espérance et la variance de X_2.

3. On note W la variable aléatoire représentant le nombre de boules rouges tirées avant l'obtention de la première boule blanche. Pour tout couple (k, l) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, déterminer la probabilité conditionnelle de l'événement $(W = l)$ sachant que $X_1 = k$. Quelle est la loi conditionnelle de W sachant que $X_1 = k$?

4. On note Y_1 la variable aléatoire représentant le numéro du tirage auquel une boule noire sort pour la première fois.

- **a.** Trouver la loi de probabilité du couple (X_1, Y_1). Les variables aléatoires X_1 et Y_1 sont elles indépendantes ?
- **b.** On se place, pour cette question, dans le cas où $r = 0$ (c'est-à-dire qu'il n'y a pas de boule rouge). Calculer alors la covariance de X_1 et Y_1.

5. Soit, pour n un entier positif, Z_n la variable aléatoire qui prend la valeur $+1$ si au n^{eme} tirage une boule blanche est tirée, -1 si au n^{eme} tirage, une boule noire est tirée, 0 si au n^{eme} tirage, une boule rouge est tirée. On note $S_n = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$

- **a.** Trouver la loi de probabilité de S_1. Calculer son espérance et sa variance ; en déduire l'espérance et la variance de S_n, pour tout $n \geqslant 1$.
- **b.** Soit t un réel strictement positif. On note $V_n = t^{S_n}$. Trouver la loi de probabilité de la variable V_1 et calculer son espérance.
- **c.** En déduire l'espérance de V_n.

Exercice 4 Espérance conditionnelle.

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité, telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1, n]\!]$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on appelle espérance conditionnelle de Y sachant $(X = k)$ le réel noté $\mathbb{E}_{[X=k]}(Y)$ défini par

$$\mathbb{E}_{[X=k]}(Y) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{[X=k]}\left([Y = i]\right).$$

1. Démontrer l'égalité

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}_{[X=k]}(Y)\mathbb{P}\left([X = k]\right).$$

On dispose de n urnes $U_1, \cdots, U_n$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'urne U_k contient k boules numérotées de 1 à k.

On choisit une urne au hasard (uniformément) et on tire une boule dans cette urne.

On note X la variable aléatoire égale au numéro de l'urne choisie et Y la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

2. Quelle est la loi de X ?

3. **a.** Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, donner la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$

Préciser l'espérance conditionnelle de Y sachant $[X = k]$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

b. Déduire de la question **1** l'espérance de Y.

4. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).

5. **a.** Déterminer la loi de Y sous forme de sommes.

b. Déterminer la variance $\mathbb{V}(Y)$ de Y en fonction de n.